

बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ: $a^2 - b^2$ और $a^3 - b^3$

चित्रों और ICT टूल्स द्वारा ज्यामितीय प्रमाण — पठन स्क्रिप्ट (ट्यूटोरियल)

रमेश प्रसाद बडोनी , IT Faculty, SCERT Uttarakhand

कक्षा: 8 और 9 (गणित — बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ) .

वीडियो: “बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ — चित्रों और ICT टूल्स द्वारा ज्यामितीय प्रमाण”

वीडियो डाउनलोड लिंक: _____ (YouTube / Google Drive लिंक यहाँ लिखें)

विद्यार्थियों के लिए: पहले यह पठन स्क्रिप्ट पढ़ें, फिर वीडियो देखें, और अंत में दिए गए अभ्यास प्रश्न हल करें। हर चरण पर कॉपी में चित्र स्वयं बनाते चलें।

सीखने के उद्देश्य

इस पाठ के बाद आप दो सूत्रों को रटे बिना, चित्र बनाकर सिद्ध कर सकेंगे।

- वर्ग के क्षेत्रफल से $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ सिद्ध करना।
- घन के आयतन से $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ सिद्ध करना।
- GeoGebra और Desmos से सूत्र की जाँच करना।
- सूत्रों से मौखिक गणित करना, जैसे 102×98 ।

आवश्यक सामग्री: कॉपी, पेंसिल, स्केल, रंगीन कागज़, कैंची, कुछ माचिस की डिब्बियाँ (या मिट्टी के घन)। इंटरनेट हो तो geogebra.org और desmos.com खोलें।

भाग 1: परिचय — सूत्र को देखकर समझें

अक्सर हम सूत्र रट लेते हैं, पर यह नहीं जानते कि सूत्र आया कहाँ से। जब सूत्र को क्षेत्रफल (area) या आयतन (volume) के चित्र में बदलते हैं, तो वही सूत्र आँखों के सामने बनता दिखता है।

इस पाठ में हम ये ICT टूल्स और सामग्री उपयोग करेंगे:

टूल	किस काम आएगा
GeoGebra	slider से a और b बदलें; आकृति तुरंत बदलती है
Desmos	सूत्र के दोनों पक्षों का ग्राफ बनाकर जाँच
Mathigon Polypad	algebra tiles और छोटे घनों को जोड़ना-तोड़ना
PowerPoint / Google Slides	animation से हर चरण एक-एक करके दिखाना
कागज़, कैंची, माचिस की डिब्बियाँ	बिना कंप्यूटर के हाथों से वही गतिविधि

याद रखें: हर सर्वसमिका (identity) a और b के **हर** मान के लिए सत्य होती है। चित्र इसी बात को दिखाता है।

भाग 2: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ का चित्र द्वारा प्रमाण

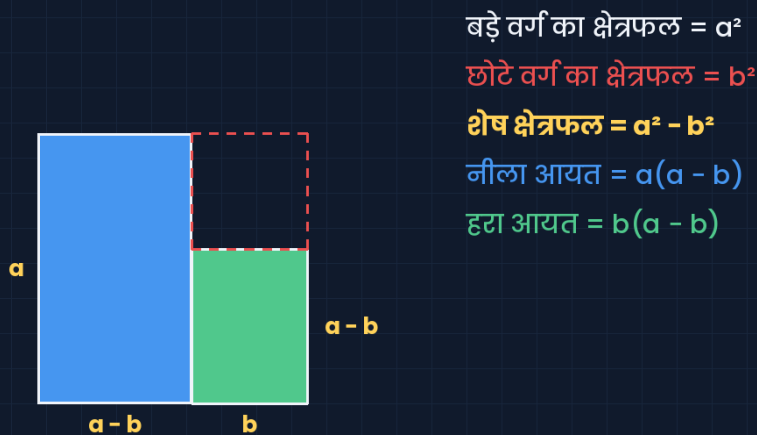
एक वर्ग से छोटा वर्ग काटकर, बचे भाग को नए आयत में बदलने पर यह सर्वसमिका सिद्ध हो जाती है।

चरण-दर-चरण (कॉपी में साथ-साथ बनाइए):

1. भुजा a वाला एक वर्ग बनाइए। इसका क्षेत्रफल $= a \times a = a^2$ ।
2. इसके ऊपरी दाएँ कोने से भुजा b वाला छोटा वर्ग काटकर हटा दीजिए। छोटे वर्ग का क्षेत्रफल $= b^2$ ।
3. बचे भाग का क्षेत्रफल $= a^2 - b^2$ । यह भाग अंग्रेजी के अक्षर L जैसा दिखता है।
4. L-आकृति को एक खड़ी रेखा से दो आयतों में बाँटिए:
 - नीला आयत: लंबाई a , चौड़ाई $(a - b) \rightarrow$ क्षेत्रफल $a(a - b)$
 - हरा आयत: लंबाई $(a - b)$, चौड़ाई $b \rightarrow$ क्षेत्रफल $b(a - b)$

सर्वसमिका 1: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Ramesh Prasad Badoni | IT Faculty, SCERT Uttarakhand

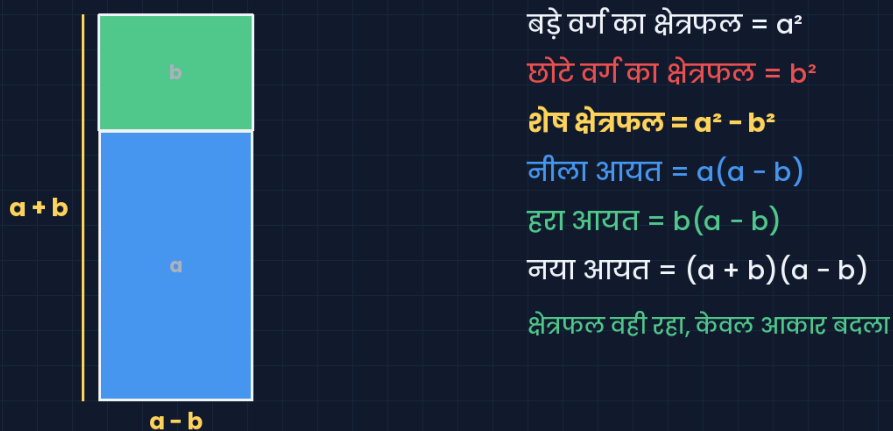


चरण 4: L-आकृति दो आयतों में बँटी हुई

5. हरे आयत को उठाइए, 90° घुमाइए और नीले आयत के ऊपर रख दीजिए।
6. अब एक नया आयत बना, जिसकी लंबाई $(a + b)$ और चौड़ाई $(a - b)$ है।

सर्वसमिका 1: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Ramesh Prasad Badoni | IT Faculty, SCERT Uttarakhand



चरण 6: नया आयत $(a + b) \times (a - b)$

हमने कोई भाग न जोड़ा, न हटाया — केवल जगह बदली। इसलिए क्षेत्रफल वही रहा:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

आम गलती से बचें: $a^2 - b^2$ कभी भी $(a - b)^2$ के बराबर नहीं होता। $a = 7, b = 3$ पर $a^2 - b^2 = 40$, जबकि $(a - b)^2 = 16$ ।

उदाहरण से जाँच ($a = 7, b = 3$):

- बायाँ पक्ष: $7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$
- दायाँ पक्ष: $(7 + 3)(7 - 3) = 10 \times 4 = 40$ — दोनों बराबर।

मौखिक गणित की तरकीब:

- $102 \times 98 = (100 + 2)(100 - 2) = 10000 - 4 = 9996$
- $51^2 - 49^2 = (51 + 49)(51 - 49) = 100 \times 2 = 200$

भाग 3: GeoGebra और Desmos में करके देखें

कंप्यूटर पर a और b बदलने से आप एक नहीं, सैकड़ों उदाहरण एक साथ देख सकते हैं।

GeoGebra ([geogebra.org/classic](https://www.geogebra.org/classic)) में:

- Slider** टूल से a और b नाम के दो slider बनाइए। b का मान a से छोटा रखिए (जैसे a : 4 से 9, b : 1 से 5)।
- Polygon** टूल से भुजा a वाला बड़ा वर्ग बनाइए। उसके कोने पर भुजा b वाला छोटा वर्ग बनाकर लाल रंग दीजिए।
- L-आकृति को नीले और हरे दो आयतों में बाँटिए।
- Translate** और **Rotate** टूल से हरे आयत को घुमाकर नीले आयत के ऊपर जोड़ दीजिए।
- अब slider आगे-पीछे खिसकाइए। हर मान पर दोनों क्षेत्रफल बराबर रहते हैं।

Desmos ([desmos.com/calculator](https://www.desmos.com/calculator)) में:

- पहली पंक्ति में लिखिए: $y = x^2 - 9$
- दूसरी पंक्ति में लिखिए: $y = (x + 3)(x - 3)$
- दोनों ग्राफ एक-दूसरे पर पूरी तरह चढ़ जाते हैं, यानी हर x के लिए दोनों पक्ष बराबर हैं।
- 9 और 3 की जगह b^2 और b लिखिए। Desmos b का slider बना देगा; b बदलने पर भी दोनों ग्राफ एक ही रहते हैं।

सोचिए: यदि $b = 0$ हो, तो चित्र और सूत्र क्या बताते हैं?

भाग 4: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ का घन द्वारा प्रमाण

एक बड़े घन से छोटा घन निकालने पर जो ठोस बचता है, वह तीन घनाभों (cuboids) में बँट जाता है; उनके आयतन जोड़ने से यह सर्वसमिका मिलती है।

चरण-दर-चरण:

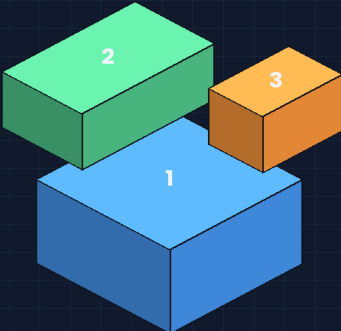
- भुजा a वाला घन लीजिए। आयतन $= a \times a \times a = a^3$ ।
- ऊपरी सामने वाले कोने से भुजा b वाला छोटा घन निकाल लीजिए। उसका आयतन $= b^3$ ।
- बचे ठोस का आयतन $= a^3 - b^3$ ।

4. बचे ठोस को तीन घनाभों में बाँटिए:

घनाभ	लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई	आयतन
1 (नीचे की परत, नीला)	$a \times a \times (a - b)$	$a^2(a - b)$
2 (ऊपर पीछे, हरा)	$a \times (a - b) \times b$	$ab(a - b)$
3 (ऊपर आगे, नारंगी)	$(a - b) \times b \times b$	$b^2(a - b)$

सर्वसमिका 2: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Ramesh Prasad Badoni | IT Faculty, SCERT Uttarakhand



बड़े घन का आयतन = a^3
छोटे घन का आयतन = b^3
शेष आयतन = $a^3 - b^3$

- $a \cdot a \cdot (a - b) = a^2(a - b)$
- $a \cdot (a - b) \cdot b = ab(a - b)$
- $(a - b) \cdot b \cdot b = b^2(a - b)$

जोड़: $a^2(a - b) + ab(a - b) + b^2(a - b)$

तीन घनाभ: नीला, हरा, नारंगी

5. तीनों आयतन जोड़िए: $a^2(a - b) + ab(a - b) + b^2(a - b)$

6. $(a - b)$ को उभयनिष्ठ (common) लीजिए:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

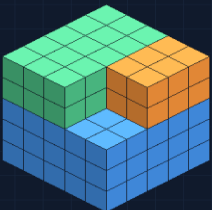
आम गलती से बचें: $a^3 - b^3$ कभी भी $(a - b)^3$ नहीं होता। $(a - b)^3$ तो भुजा $(a - b)$ वाला केवल एक छोटा घन है।

संख्याओं और छोटे घनों से जाँच ($a = 5, b = 2$):

- 125 छोटे घनों के बड़े घन से कोने के 8 घन हटाने पर 117 घन बचते हैं।
- नीले $5 \times 5 \times 3 = 75$, हरे $5 \times 3 \times 2 = 30$, नारंगी $3 \times 2 \times 2 = 12$; कुल 117।
- दायाँ पक्ष: $(5 - 2)(25 + 10 + 4) = 3 \times 39 = 117$ — दोनों बराबर।

संख्याओं और घनों से जाँच

Ramesh Prasad Badoni | IT Faculty, SCERT Uttarakhand



1 घन = 1 इकाई आयतन

GeoGebra 3D Calculator

Cube और Prism टूल से घनाभ बनाएँ, घुमाकर देखें

Mathigon Polypad

छोटे घनों से घन बनाएँ, कोना हटाकर गिनें

$5 \times 5 \times 5$ घन से कोने के 8 घन हटाने पर

ICT में: GeoGebra 3D Calculator में Cube और Prism टूल से ये घनाभ बनाकर घुमाइए। Mathigon Polypad में छोटे घनों से घन बनाकर कोना हटाइए और गिनिए।

भाग 5: गतिविधि, अभ्यास और सारांश

कक्षा गतिविधि (समूह में, 20 मिनट):

1. रंगीन कागज़ से 7 सेमी भुजा का वर्ग काटिए, कोने से 3 सेमी का वर्ग हटाइए, और बचे भाग से नया आयत बनाइए। उसकी भुजाएँ नापिए।
2. माचिस की डिब्बियों या मिट्टी के छोटे घनों से $3 \times 3 \times 3$ घन बनाइए। कोने से 1 घन हटाकर गिनिए कि 26 बचे, और सूत्र से जाँचिए: $(3 - 1)(9 + 3 + 1) = 26$ ।
3. GeoGebra या Polypad पर वही गतिविधि दोहराइए और अपने साथी को समझाइए।

अभ्यास प्रश्न:

1. सूत्र से हल कीजिए: (क) 99×101 (ख) 47×53 (ग) $75^2 - 25^2$
2. गुणनखंड कीजिए: (क) $x^2 - 16$ (ख) $9y^2 - 4$ (ग) $x^3 - 27$ (घ) $8a^3 - 1$
3. $10^3 - 7^3$ का मान सर्वसमिका से निकालिए।
4. चित्र बनाकर समझाइए कि $a^2 - b^2 \neq (a - b)^2$ क्यों है।

उत्तर (जाँचने के लिए): 1. (क) 9999 (ख) 2491 (ग) 5000 · 2. (क) $(x + 4)(x - 4)$ (ख) $(3y + 2)(3y - 2)$ (ग) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ (घ) $(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)$ · 3. $3 \times (100 + 70 + 49) = 657$

गृहकार्य (चुनौती): इसी प्रकार चित्र से सिद्ध कीजिए:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

सारांश:

- $a^2 - b^2$ को **वर्ग के क्षेत्रफल** से, और $a^3 - b^3$ को **घन के आयतन** से सिद्ध किया जाता है।
- टुकड़ों की जगह बदलने से क्षेत्रफल या आयतन नहीं बदलता — यही प्रमाण का आधार है।
- चित्र + ICT टूल्स + गतिविधि = रटना नहीं, समझना।