

Geometry और ICT — R P Badoni IT Faculty SCERT Uttarakhand

यह पठन सामग्री tutorial video “Geometry और ICT — Animation से गणित सिखाना” के साथ पढ़ने और करने के लिए है। हर उदाहरण में पहले पढ़िए, फिर चित्र देखिए, फिर हाथ से गतिविधि कीजिए, और अंत में प्रश्न हल कीजिए।

परिचय

सीखने के उद्देश्य — इस सामग्री के बाद आप:

1. Triangle के angles का जोड़ 180° होने को कागज़ और GeoGebra दोनों से दिखा सकेंगे।
2. Pythagoras theorem ($a^2 + b^2 = c^2$) को squares और rearrangement से समझा सकेंगे।
3. Semicircle के angle (90°) और circle के area (πr^2) को चित्र से सिद्ध कर सकेंगे।
4. चार तरह के ICT tools से अपना छोटा animation बना सकेंगे।
5. कक्षा में animation का उपयोग Predict → Observe → Explain → Practice क्रम में कर सकेंगे।

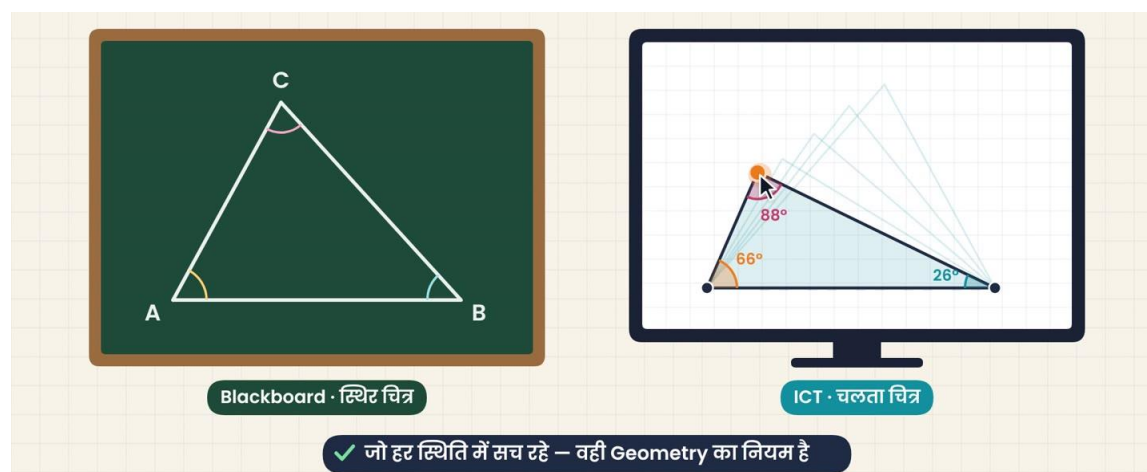
कैसे पढ़ें: हर उदाहरण के लिए video का वही हिस्सा देखिए, फिर यहाँ का पाठ पढ़िए। “रुककर सोचिए” वाले प्रश्न पर पहले अपना अनुमान लिखिए, फिर आगे पढ़िए।

ज़रूरी सामग्री:

गतिविधि के लिए	सामग्री
कागज़ की गतिविधियाँ	रंगीन कागज़, कैंची, गोंद, scale, pencil, protractor, compass
ICT गतिविधियाँ	Computer या mobile, GeoGebra (मुफ्त, web या app), इंटरनेट
Recording (शिक्षकों के लिए)	OBS Studio या mobile screen recorder, microphone/earphone

1. ICT क्यों? स्थिर चित्र बनाम चलता चित्र

पठन: Blackboard पर बना चित्र स्थिर होता है। Student एक ही triangle देखता है और उसे लग सकता है कि नियम सिर्फ उसी चित्र के लिए है। ICT में वही चित्र चलने लगता है: हम किसी point को खींचते हैं और आकृति बदल जाती है। जो बात हर स्थिति में सच रहती है, वही Geometry का नियम है।



चित्र 1 — बाएँ: एक ही स्थिति। दाएँ: vertex खींचने पर कई स्थितियाँ, हर बार नए angles।

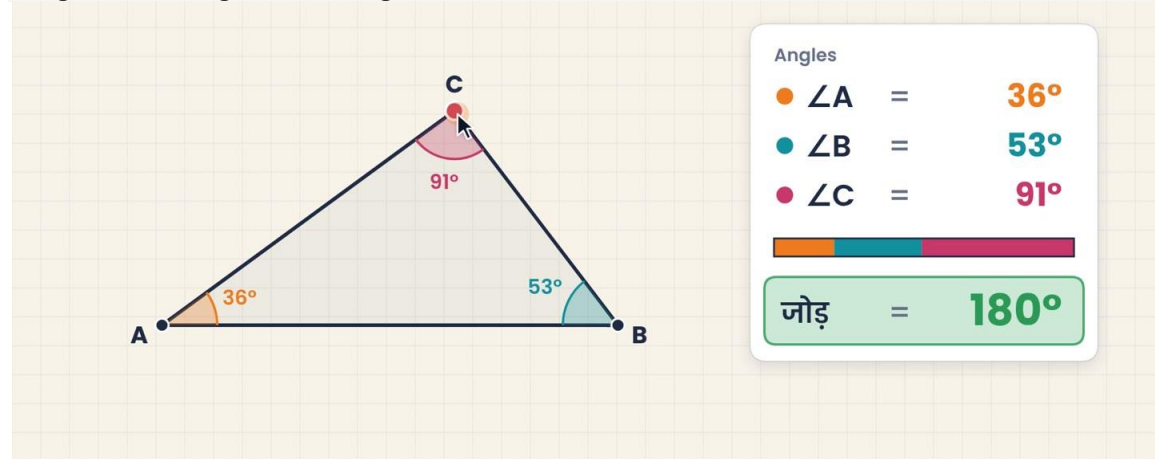
याद रखिए: Static (स्थिर) चित्र एक उदाहरण दिखाता है; dynamic (चलता) चित्र सैकड़ों उदाहरण एक साथ दिखाता है।

रुककर सोचिए: अपनी गणित की किताब का कोई एक चित्र चुनिए। अगर वह चित्र चल सकता, तो आप किस point को खींचते, और क्या देखना चाहते?

2. उदाहरण 1 — Triangle के angles का जोड़ 180°

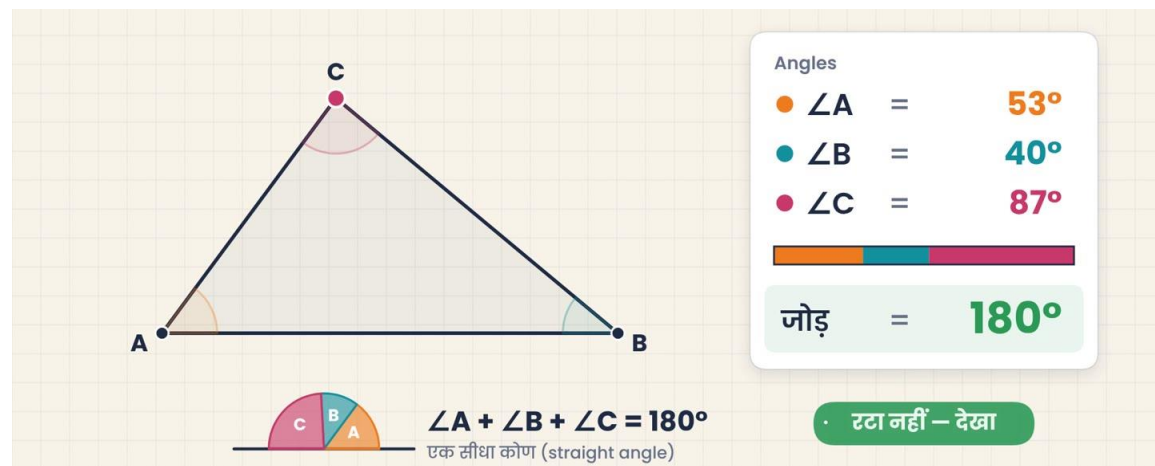
पठन: Triangle ABC के तीन angles हैं: $\angle A$, $\angle B$ और $\angle C$ । Vertex C को कहीं भी खींचिए — triangle नुकीला (acute) हो, चपटा (obtuse) हो या right angle वाला — तीनों angles बदलते हैं, पर उनका जोड़ हमेशा 180° रहता है।

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



चित्र 2 — दाएँ की रंगीन पट्टी की कुल लंबाई कभी नहीं बदलती; सिर्फ़ तीन रंगों का बंटवारा बदलता है।

क्यों? तीनों कोनों को काटकर एक सीधी line पर साथ-साथ रखें, तो वे ठीक एक सीधा कोण (straight angle) बनाते हैं, और सीधा कोण 180° का होता है।



चित्र 3 — कोने A, B, C एक बिंदु पर मिलकर आधा घेरा (180°) बनाते हैं।

हाथ से करके देखिए — गतिविधि 1A: कागज़ के कोने (15 minute)

1. रंगीन कागज़ पर कोई भी बड़ा triangle बनाकर काटिए। कोनों पर A, B, C लिखिए।
2. तीनों कोनों पर छोटा arc बनाइए, फिर तीनों कोने फ़ाड़कर अलग करिए।
3. Copy में एक सीधी line खींचिए और उस पर एक बिंदु O लीजिए।
4. तीनों कोनों की नोक O पर रखकर, उन्हें बिना खाली जगह छोड़े साथ-साथ चिपकाइए।
5. देखिए — क्या तीनों मिलकर सीधी line पर आधा घेरा भरते हैं?

कक्षा में हर student अलग आकार का triangle ले। सबका परिणाम एक जैसा आए, तो नियम साबित होता है।

गतिविधि 1B: Protractor से नापिए और तालिका भरिए

तीन अलग triangles बनाइए और angles नापकर लिखिए। नाप में 1° – 2° का अंतर सामान्य है।

Triangle	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	जोड़
1 (नुकीला)				
2 (चपटा)				
3 (right angle)				

गतिविधि 1C: GeoGebra में खींचकर देखिए

Polygon tool से triangle बनाइए, Angle tool से triangle पर click कीजिए, और Move tool से किसी vertex को खींचिए। पूरे क्रम अनुभाग 5 में हैं।

प्रश्न:

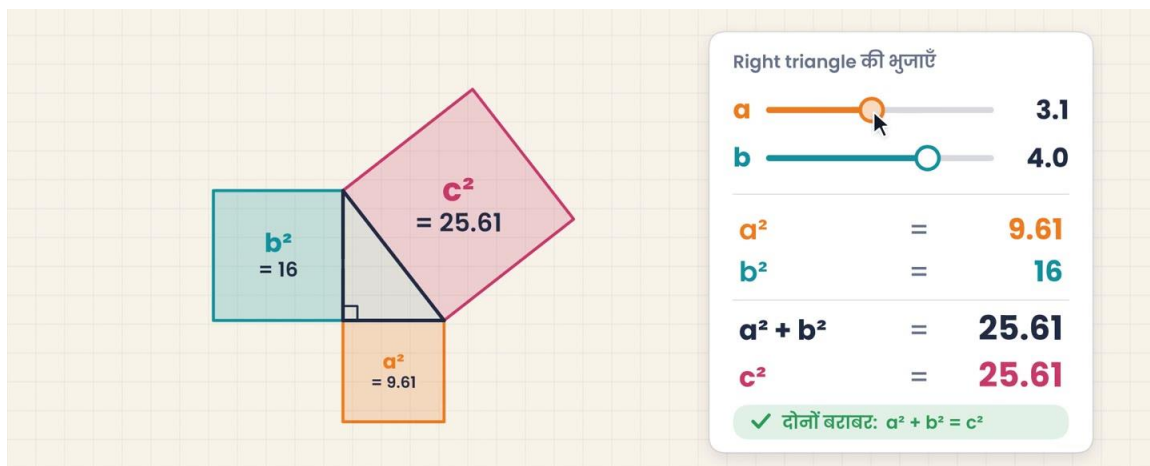
1. एक triangle के दो angles 65° और 45° हैं। तीसरा angle कितना है?
2. क्या किसी triangle में दो right angles हो सकते हैं? कारण लिखिए।
3. रुककर सोचिए: चार भुजाओं वाली आकृति (quadrilateral) के चारों angles का जोड़ कितना होगा? संकेत: एक diagonal खींचिए।

3. उदाहरण 2 — Pythagoras theorem

पठन: Right triangle की दो छोटी भुजाएँ a और b हैं, और सबसे लंबी भुजा c है, जिसे hypotenuse कहते हैं। हर भुजा पर square बनाएँ, तो दोनों छोटे squares के area का जोड़, बड़े square के area के बराबर होता है।

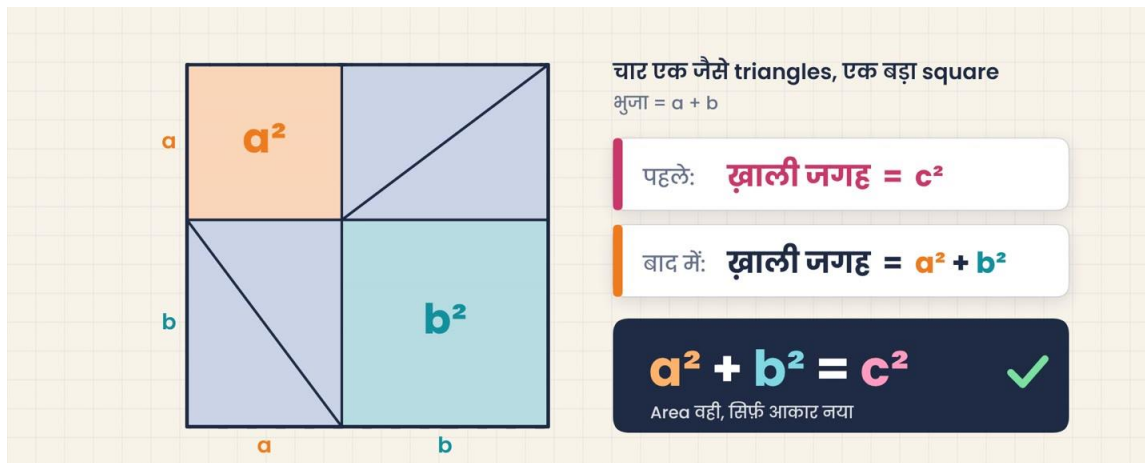
$$a^2 + b^2 = c^2$$

उदाहरण: $a = 3$, $b = 4$ हो तो $a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25 = c^2$, यानी $c = 5$ । Slider से a और b बदलें, तब भी यह बराबरी बनी रहती है (जैसे $a = 2.8$, $b = 4$ पर $7.84 + 16 = 23.84$)।



चित्र 4 — संख्याएँ बदलती हैं, पर $a^2 + b^2$ हमेशा c^2 के बराबर रहता है।

बिना संख्या के प्रमाण: भुजा $(a + b)$ वाले एक बड़े square में चार एक जैसे triangles रखिए। पहली व्यवस्था में बीच की खाली जगह एक तिरछा square (c^2) है। Triangles को खिसकाने पर वही खाली जगह दो squares (a^2 और b^2) बन जाती है। खाली जगह उतनी ही रही, इसलिए $c^2 = a^2 + b^2$ ।



चित्र 5 — खिसकाने के बाद की व्यवस्था: खाली जगह = a^2 (नारंगी) + b^2 (नीली)।

हाथ से करके देखिए — गतिविधि 2A: खानों वाला कागज़ (20 minute)

1. Graph paper पर 3 खाने और 4 खाने की भुजाओं वाला right triangle बनाइए।
2. तीनों भुजाओं पर बाहर की ओर square बनाइए और तीन अलग रंगों से भरिए।
3. छोटे squares के खाने गिनिए (9 और 16)।
4. दोनों छोटे squares काटिए और उनके टुकड़े बड़े square पर रखकर देखिए — क्या वे उसे पूरा ढक देते हैं (25 खाने)?

गतिविधि 2B: चार triangles का पहली खेल

1. गते से चार एक जैसे right triangles (भुजाएँ 6 cm और 8 cm) काटिए।
2. कागज़ पर 14 cm का square (6 + 8) बनाइए।
3. पहले triangles को कोनों में ऐसे रखिए कि बीच में तिरछा square खाली रहे। उसकी भुजा नापिए।
4. फिर इन्हीं चारों को दो-दो करके दो rectangles में जोड़िए। अब खाली जगह कितने squares बनीं?

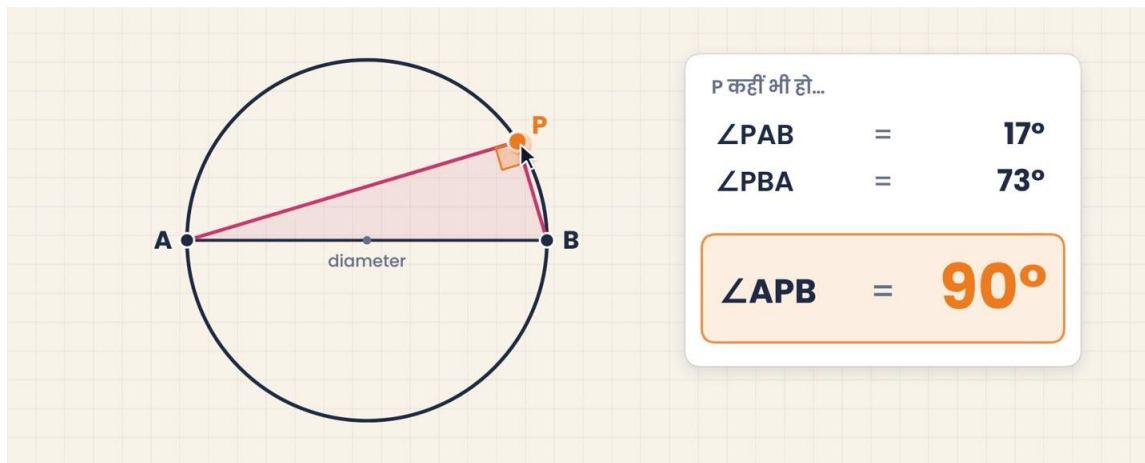
प्रश्न:

1. $a = 5$, $b = 12$ हो तो c कितना होगा?
2. एक सीढ़ी 13 m लंबी है और उसका निचला सिरा दीवार से 5 m दूर है। सीढ़ी दीवार पर कितनी ऊँचाई तक पहुँचती है?
3. रुककर सोचिए: $a = 6$ और $b = 8$ हो, तो hypotenuse c कितना होगा?

4. उदाहरण 3 — Circle

(क) Semicircle में बना angle

पठन: AB circle का diameter है। Circle पर कोई भी point P लेकर उसे A और B से जोड़िए। P को circle पर कहीं भी घुमाएँ, $\angle PAB$ और $\angle PBA$ बदलते हैं, पर $\angle APB$ हमेशा 90° रहता है। यानी semicircle में बना angle हमेशा right angle होता है।



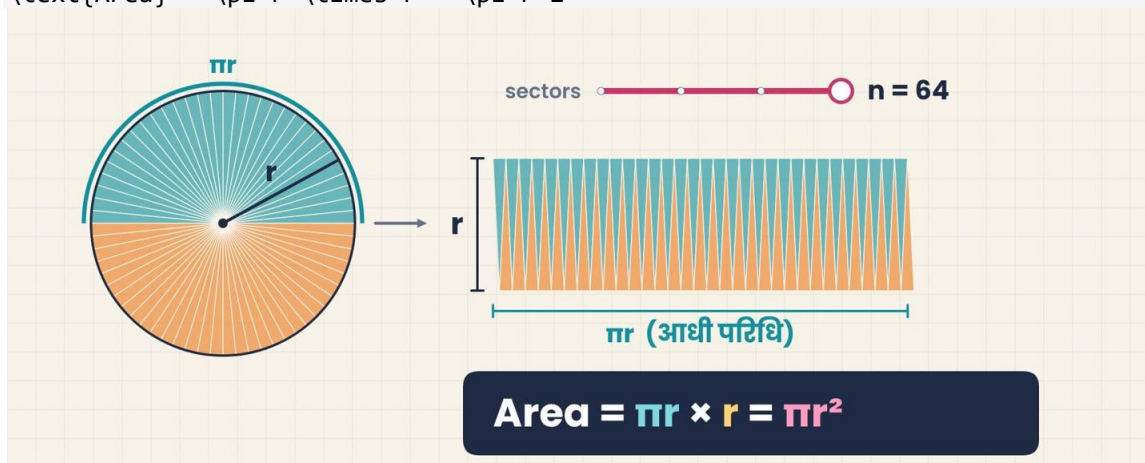
चित्र 6 — $\angle PAB + \angle PBA$ हमेशा 90° , इसलिए $\angle APB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ।

क्यों? Centre O से P तक radius खींचें। $OA = OP = OB$, इसलिए दो isosceles triangles बनते हैं। $\angle OAP = \angle OPA = x$ और $\angle OBP = \angle OPB = y$ । बड़े triangle APB में $x + y + (x + y) = 180^\circ$, इसलिए $x + y = 90^\circ = \angle APB$ ।

(ख) Circle का area πr^2 क्यों?

पठन: Circle को बराबर sectors में काटिए और उन्हें उलट-पलट कर एक पंक्ति में लगाइए। Sectors जितने ज्यादा ($n = 8, 16, 32, 64$), आकृति उतनी ही rectangle जैसी। इस rectangle की ऊँचाई r है और लंबाई आधी परिधि, यानी πr ।

$$\text{Area} = \pi r \times r = \pi r^2$$



चित्र 7 — ऊपरी आधा घेरा (नीला) rectangle की ऊपरी लंबाई बनता है, निचला आधा (नारंगी) निचली।

हाथ से करके देखिए — गतिविधि 3A: कोने की जाँच (10 minute)

1. Compass से circle बनाइए और उसका diameter AB खींचिए।
2. Circle पर पाँच अलग points P_1 से P_5 लीजिए और हर एक को A और B से जोड़िए।
3. हर $\angle AP_i B$ में एक कागज़ का कोना (किसी कार्ड का कोना, 90°) रखकर जाँचिए — क्या हर बार फिट होता है?

गतिविधि 3B: कागज़ की पिज़्ज़ा (20 minute)

1. दो रंग का कागज़ लीजिए। $r = 7$ cm का circle काटिए; ऊपरी आधा एक रंग, निचला आधा दूसरा रंग करिए।
2. तह करके 16 बराबर sectors बनाइए और काटिए।
3. ऊपरी आधे के sectors नोक नीचे करके, निचले आधे के नोक ऊपर करके बारी-बारी एक पंक्ति में चिपकाइए।
4. बनी आकृति की लंबाई और ऊँचाई नापिए। लंबाई लगभग 22 cm ($\pi \times 7$) और ऊँचाई लगभग 7 cm आनी चाहिए।
5. $\text{Area} \approx 22 \times 7 = 154 \text{ cm}^2$ । Formula से जाँचिए: $\pi r^2 = (22/7) \times 7 \times 7 = 154 \text{ cm}^2$ ।

प्रश्न:

1. 14 cm radius वाले circle का area कितना है? ($\pi = 22/7$)
2. एक triangle circle में ऐसे बना है कि उसकी एक भुजा diameter है। उसका सामने वाला angle कितना होगा?
3. रुककर सोचिए: radius दोगुना कर दें, तो area कितने गुना हो जाएगा?

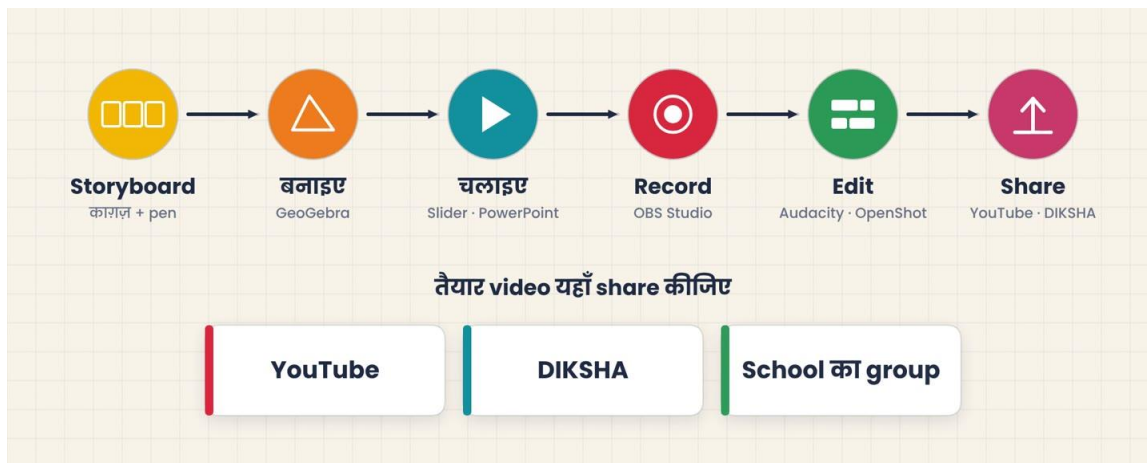
5. ऐसे animation किन ICT tools से बनते हैं

पठन: एक animated गणित video चार तरह के tools से बनता है। जब student को खुद खींचकर देखना हो, तब GeoGebra चुनिए; जब क्रम एक तय क्रम में दिखाने हों, तब PowerPoint।

Tool का प्रकार	उदाहरण	क्या करता है
Dynamic geometry software	GeoGebra (मुफ्त, computer और mobile)	Point, line, circle, polygon बनाकर mouse से खींचना; slider से माप बदलना
Presentation software	PowerPoint	Custom animation, motion path; पूरी presentation को video (MP4) के रूप में export
Screen recorder	OBS Studio	Screen की हर हलचल आपकी आवाज़ के साथ record
Audio / video editor	Audacity, OpenShot	आवाज़ साफ़ करना, clips जोड़ना, caption लगाना

बनाने का क्रम: Storyboard → बनाइए → चलाइए → Record → Edit → Share (YouTube, DIKSHA, school group)।

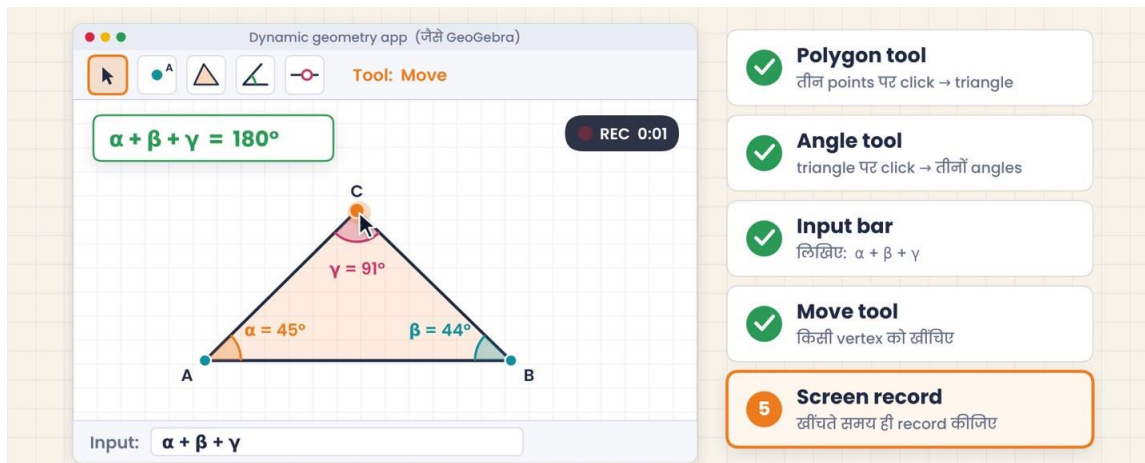
Record करते समय कमरा शांत रखिए, microphone पास रखिए और cursor धीरे चलाइए।



चित्र 8 — छह क्रमों का क्रम; नीचे तैयार video share करने की जगहें

गतिविधि 4: GeoGebra में अपना पहला animation (30 minute)

1. **Polygon tool** चुनिए और तीन points पर click करके, फिर पहले point पर दोबारा click करके triangle बनाइए।
2. **Angle tool** चुनकर triangle के अंदर click कीजिए — तीनों angles (α , β , γ) नप जाएँगे।
3. **Input bar** में $\alpha + \beta + \gamma$ लिखकर Enter दबाइए — जोड़ 180° दिखेगा।
4. **Move tool** से किसी vertex को खींचिए और देखिए कि जोड़ नहीं बदलता।
5. उसी समय **screen record** कीजिए (OBS Studio या mobile का screen recorder) और अपनी आवाज़ में समझाइए।



चित्र 9 — बाएँ: *app* में *triangle* और जोड़ 180° ; दाएँ: पाँच कदमों की सूची। (चित्र में *app* का साधारण रूप है; असली *GeoGebra* की स्क्रीन थोड़ी अलग दिख सकती है।)

अभ्यास कार्य: इसी तरह *GeoGebra* में एक circle, उसका diameter AB और circle पर point P बनाइए। $\angle APB$ नापिए और P को खींचकर 30 सेकंड का अपना video record कीजिए।

- Triangle animation बनाया
- Semicircle animation बनाया
- अपनी आवाज़ के साथ record किया
- कक्षा या group में share किया

6. कक्षा में प्रभावी उपयोग (शिक्षकों के लिए)

पठन: Animation तभी सफल है जब student नियम को अपने शब्दों में बता सके। इसके लिए छह बातें याद रखिए:

1. पहले अनुमान, फिर **animation** — video रोककर पूछिए: “अगर इस point को खींचें, तो क्या होगा?”
2. दिखाइए नहीं, करवाइए — students ICT lab या mobile पर खुद point खींचें।
3. एक **clip**, एक **concept** — clip 3 से 5 minute का हो।
4. कागज़ की गतिविधि से जोड़िए — जैसे triangle के कोने सचमुच काटकर जोड़ना।
5. अपनी भाषा में आवाज़ और **caption** — ताकि हर student साथ चल सके।
6. अंत में **2-3 सवाल** — student नियम अपने शब्दों में बताए।

40 minute की कक्षा की योजना

Animation सिर्फ 5 minute का है; बाक़ी समय students के सोचने और करने का है।

